ĐỀ THI CHỌN
HỌC SINH GIỎI LỚP 9
VÒNG 2, Quận TÂN BÌNH (2014-2015)

(NGÀY THI: 30/12/2014)

Bài 1: (4 điểm)

1) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có các hệ số a, b, c là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm thì các nghiệm ấy không thể là số hữu tỉ.
2) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt $mx^4-(m-3)x^2+3m=0$.

Bài 2: (4 điểm)

1) Giải phương trình sau: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$ (2 điểm)
2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=15\\(x-y)(x^2-y^2)=3\end{cases}$ (2 điểm)

Bài 3: (4 điểm)

1) Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{1}{abc}$ (1,5 điểm)
2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2+17y^2+34xy+51(x+y)=1740$ (1,5 điểm)
3) Tìm a, b để $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị nhỏ nhất là -1 và có giá trị lớn nhất là 4. (1 điểm)

Bài 4: (2 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH. Gọi I là giao điểm của AH và MN. Chứng minh I là trực tâm của ΔBKC.

Bài 5: (4 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M di chuyển trên đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

1) Ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. (2 điểm)
2) Đường thẳng chứa A_1, B_1, C_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển. (2 điểm)

Bài 6: (2 điểm) Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn (AB < AD). Tia phân giác của góc BAD cắt BC tại M và cắt DC tại N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN. Chứng minh tứ giác BKCD nội tiếp.

★ **HẾT** ★

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG 2 LỚP 9 Quận TÂN BÌNH (2014-2015)

Bài 1: (4 điểm)

1) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có các hệ số a, b, c là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm thì các nghiệm ấy không thể là số hữu tỉ. (2 điểm)

Do a, b, c là 3 số nguyên lẻ nên ta đặt: $a=2m+1; b=2k+1; c=2n+1$ với $k,m,n\in Z$

Giả sử phương trình có nghiệm hữu tỉ thì: $\Delta=b^2-4ac$ phải là số chính phương lẻ (do b lẻ và 4ac là số chẵn).

$\Rightarrow \Delta=(2t+1)^2=b^2-4ac \Rightarrow (2k+1)^2-(2t+1)^2=4(2m+1)(2n+1)$

$\Rightarrow 4k(k+1)-4t(t+1)=4(2m+1)(2n+1)$: vô lí vì vế trái là số chia hết cho 8 còn vế phải không chia hết cho 8.

Do đó phương trình có nghiệm thì các nghiệm ấy không thể là số hữu tỉ.

2) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt $mx^4-(m-3)x^2+3m=0$. (2 điểm)

$mx^4-(m-3)x^2+3m=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^2$, phương trình (1) trở thành: $mt^2-(m-3)t+3m=0 \quad (2)$

$a=m; b=-(m-3); c=3m$

$\Delta=b^2-4ac=\left[-(m-3)\right]^2-4m(3m)=m^2-6m+9-12m^2=-11m^2-6m+9$

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} S=t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{m-3}{m} \\ P=t_1t_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3m}{m}=3 \end{cases}$

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -11m^2-6m+9>0 \\ \dfrac{m-3}{m}>0 \\ 3>0 \ (\text{luôn đúng}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \dfrac{-3-\sqrt{108}}{11}<m<\dfrac{-3+\sqrt{108}}{11} \\ m<0 \text{ hay } m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-3-\sqrt{108}}{11}<m<0$$

Vậy $\dfrac{-3-\sqrt{108}}{11}<m<0$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 2: (4 điểm)

1) Giải phương trình sau: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$ (2 điểm)

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$ (điều kiện: $x\geq 1$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\frac{x+3}{2}$$

TH1: $\sqrt{x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$. **Khi đó phương trình trở thành:**

$$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\frac{x+3}{2}\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1}=x+3\Leftrightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\ 16\left(x-1\right)=\left(x+3\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2-10x+25=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ \left(x-5\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=5\left(\text{nhận}\right)$$

TH1: $\sqrt{x-1}-1<0\Leftrightarrow 1\le x<2$. **Khi đó phương trình trở thành:**

$$\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=\frac{x+3}{2}\Leftrightarrow x+3=4\Leftrightarrow x=1\left(\text{nhận}\right)$$

Vậy $S=\left\{1;5\right\}$

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}$ **(2 điểm)**

Ta có:

$$\begin{cases}\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=5\left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+y\right)\left[5\left(x-y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)\right]=0\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+y\right)\left(2x^2-5xy+2y^2\right)=0\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+y\right)\left(x-2y\right)\left(2x-y\right)=0\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\quad (I)\\ \begin{cases}x=2y\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\quad (II)\\ \begin{cases}y=2x\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\quad (III)\end{array}\right.$$

Giải hệ (I) $\begin{cases}x=-y\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-y\\ \left(-y-y\right)\left(0\right)=3\left(\text{vô lí}\right)\end{cases}$

Giải hệ (II) $\begin{cases}x=2y\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\ \left(2y-y\right)\left(4y^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\ 3y^3=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Giải hệ (III) $\begin{cases}y=2x\\ \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ \left(x-2x\right)\left(x^2-4x^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ 3x^3=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ **hay** $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

Bài 3: (4 điểm)

1) Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{1}{abc}$ (1,5 điểm)

Ta có:

$$(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\ge ab\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b)+abc\Leftrightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}\quad(1)$$

Cmtt, ta có: $\begin{cases}\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\le\dfrac{1}{bc(a+b+c)} & (2)\\ \dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{1}{ca(a+b+c)} & (3)\end{cases}$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3), ta có:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{c+a+b}{abc(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2+17y^2+34xy+51(x+y)=1740$ (1,5 điểm)

$$\Leftrightarrow x^2+17\left[y^2+2xy+3(x+y)\right]=1740$$

Do x nguyên nên x có dạng: $x=17k\pm r$ với $r\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $k\in Z$

$\Rightarrow x^2\in\{17n,17n+1;17n+4,17n+9,17n+8,17n+2,17n+15,17n+13\}$ với $n\in Z$

Ta thấy rằng vế phải là 1740 khi cho cho 17 có số dư là 6. Trong khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

3) Tìm a, b để $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị nhỏ nhất là -1 và có giá trị lớn nhất là 4. (1 điểm)

Vì $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị nhỏ nhất là -1 và có giá trị lớn nhất là 4

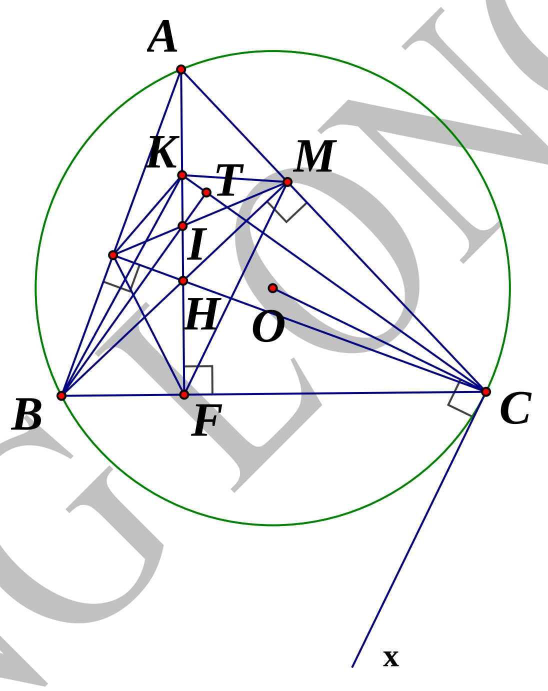
nên $-1\le\dfrac{ax+b}{x^2+1}\le 4$, $\forall a,b$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x^2+1}\ge -1\ ,\ \forall a,b\\ \dfrac{ax+b}{x^2+1}\le 4\ ,\ \forall a,b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+b+1\ge 0\ ,\ \forall a,b\\ 4x^2-ax-b+4\ge 0\ ,\ \forall a,b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b+1\ge 0\ ,\ \forall a,b\\ \left(2x-\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{16}-b+4\ge 0\ ,\ \forall a,b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a^2}{4}+b+1=0 \\ -\dfrac{a^2}{16}-b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{16}+5=0 \\ -\dfrac{a^2}{4}+b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 4 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$ thì $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị nhỏ nhất là -1 và có giá trị lớn nhất là 4

Bài 4: (2 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH. Gọi I là giao điểm của AH và MN. Chứng minh I là trực tâm của ΔBKC.



Gọi F là giao điểm của AH và BC.

Gọi T là giao điểm của BI và KC

Xét ΔFKN và ΔFMI, ta có:

$$\begin{cases} NFK = MFI(\ldots) \\ FKN = FMI(=2NMH) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta FKN \backsim \Delta FMI(g-g) \Rightarrow \dfrac{FK}{FM}=\dfrac{FN}{FI}$

$\Rightarrow FN.FM = FI.FK$. Mà $FB.FC = FN.FM(\Delta FNB \backsim \Delta FCM)$

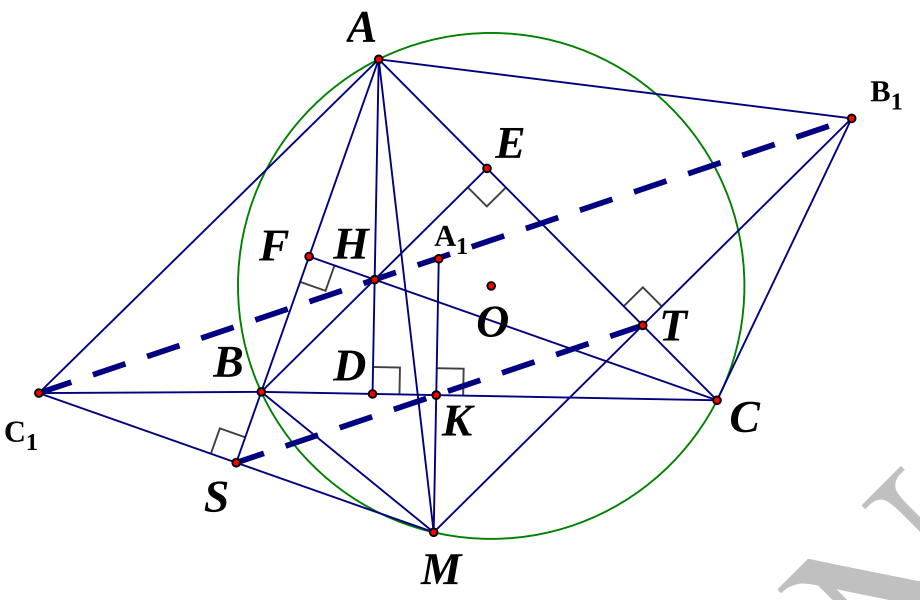
Nên $FB.FC = FI.FK \Rightarrow \dfrac{FB}{FK}=\dfrac{FI}{FC}$. Mà $BFI = KFC(=90^0)$

Nên $\Delta FBI \backsim \Delta FKC \Rightarrow IBF = IKT$(hai góc tương ứng)

Mà $BIF = KIT$(đối đỉnh). Nên $IKT + KIT = IBF + BIF = 90^0$

$\Rightarrow KTI = 90^0 \Rightarrow BT \perp KC$

Bài 5: (4 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M di chuyển trên đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng:



1) Ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. (2 điểm)

Gọi S, K, T lần lượt là giao điểm của $MC_1; MA_1; MB_1$ với AB, BC, AC.

Chứng minh được: S, K, T thẳng hàng. (đường thẳng Simpson)

$\Rightarrow \begin{cases} \text{S là trung điểm của } MC_1 \\ \text{K là trung điểm của } MA_1 \\ \text{T là trung điểm của } MB_1 \end{cases}$

Dùng đường trung bình chứng minh được: $\begin{cases} SK // C_1A_1 \\ KT // A_1B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ST // C_1A_1 \\ ST // A_1B_1 \end{cases} \Rightarrow C_1A_1 \equiv A_1B_1$

$\Rightarrow A_1, B_1, C_1$ thẳng hàng. (1)

2) Đường thẳng chứa A_1, B_1, C_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển. (2 điểm)

Vẽ AD, BE, CF lần lượt là 3 đường cao của ΔABC cắt nhau tại H.

Ta chứng minh được: $BHD = ACB = AMB = AC_1B$ (t / c đối xứng)

$\Rightarrow BHD = AC_1B \Rightarrow$ Tứ giác AC_1BH nội tiếp $\Rightarrow AHC_1 = ABC_1 = ABM$ (t / c đối xứng) (1)

Chứng minh tương tự ta được: $AHB_1 = ACM (2)$

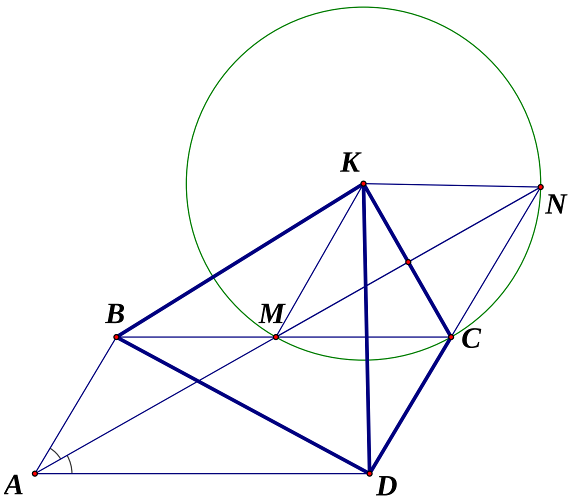
Từ (1) và (2) cộng vế ta được: $AHC_1 + AHB_1 = ABM + ACM$

$\Rightarrow C_1HB_1 = 180^0 \Rightarrow C_1, H, B_1$ thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm $\Rightarrow A_1, B_1, C_1, H$ thẳng hàng. Mà H cố định.

Nên đường thẳng chứa A_1, B_1, C_1 luôn đi qua một điểm H cố định khi M di chuyển.

Bài 6: (2 điểm) Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn (AB < AD). Tia phân giác của góc BAD cắt BC tại M và cắt DC tại N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN. Chứng minh: tứ giác BKCD nội tiếp.



Chứng minh: tứ giác BKCD nội tiếp.

Ta có:

$$\begin{cases} DAN = MAB\left(\text{AM là tia phân giác của } BAD\right) \\ DNA = MAB\left(\text{hai góc so le trong và } AB \parallel DN\right) \end{cases} \Rightarrow DAN = DNA \Rightarrow \Delta DAN \text{ cân tại D.}$$

$\Rightarrow DN = DA$. Mà DA = BC (tứ giác ABCD là hình bình hành). Nên DN = BC.

Ta có :

$$\begin{cases} NMC = DAN\left(BC \parallel AC\right) \\ MNC = MAB\left(AB \parallel DN\right) \\ DAN = MAB\left(...\right) \end{cases} \Rightarrow NMC = MNC \Rightarrow \Delta CMN \text{ cân tại C.}$$

$\Rightarrow CM = CN$. Mà KM = KN (bán kính (K)). Nên KC là đường trung trực của MN.

$\Rightarrow CK \perp MN$

Ta có :

$$\begin{cases} BC = DN \\ CM = CN \end{cases} \Rightarrow BC - CM = DN - CN \Rightarrow BM = DC$$

ΔCMN cân tại C có CK là đường cao (...) Nên CK cũng là đường phân giác của ΔCMN.

$\Rightarrow MCK = NCK$ (1)

Ta có : KM = KC $\Rightarrow \Delta KMC$ cân tại K $\Rightarrow KMC = MCK\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra : $KMC = NCK$

Mà $KMC + BMK = NCK + DCK = 180^0 \Rightarrow BMK = DCK$

Xét ΔBMK và ΔDCK, ta có : $\begin{cases} BM = DC \\ BMK = DCK \\ KM = KC \end{cases} \Rightarrow \Delta BMK = \Delta DCK\left(c-g-c\right) \Rightarrow MBK = CDK$

$\Rightarrow$ Tứ giác BKCD nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới 2 góc bằng nhau)

★ HẾT ★